1.- Sabem que el vector $(2,1,-1)$ ***és una solució del sistema***

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + cz = \quad a+c \\ bx - \ y \ + bz = a-b-c \\ cx - by + 2z = \qquad b \end{array}\right\}.$$

Calculeu el valor dels paràmetres a***,*** b ***i*** c***.***

[2 punts]

Solució

Si $(2,1,-1)$ és solució del sistema, s'ha de complir que

$$\left.\begin{array}{l} 2a+b-c = \quad a+c \\ 2b-1-b = a-b-c \\ 2c-b-2 = \qquad b \end{array}\right\},$$

que és un sistema d'equacions on a, b i c són les variables. La seva solució és $a=3$, $b=1$, $c=2$.

NOTA: A l'enunciat de la prova, per un error tècnic, la tercera equació del sistema ha sortit diferent: $cx - by + 2x = b$. No hi ha cap problema en solucionar-ho també d'aquesta forma. El resultat és, llavors, $a = -9/2$, $b = -1/2$ i $c = -5/2$. S'han donat per correctes els dos possibles enunciats i solucions.

2.- La corba $y = x^2$ ***i la recta*** $y = k$***, amb*** $k > 0$***, determinen una regió plana.***

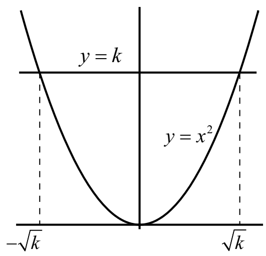
(a) ***Calculeu l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre*** k***.***

(b) ***Trobeu el valor de*** k ***perquè l'àrea limitada sigui*** $\sqrt{6}\,u^2$***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

La gràfica de la situació descrita és



(a) Les abscisses dels punts d'intersecció entre la corba i la recta són $x = \pm\sqrt{k}$. Per tant, per a qualsevol valor de k,

$$A = \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \left(k - x^2\right) dx = \left[kx - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} = \frac{4k\sqrt{k}}{3}.$$

(b) Volem que $\dfrac{4k\sqrt{k}}{3} = \sqrt{6}$. Elevant al quadrat els dos membres d'aquesta equació ens queda

$$\frac{16k^3}{9} = 6 \Longrightarrow k = \frac{3}{2}.$$

3.- Sigui $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

(a) ***Què significa que la matriu B sigui la inversa de A?***

(b) ***Trobeu el valor del paràmetre p perquè la matriu inversa de A i la matriu transposada de A coincideixin.***

NOTA***: No aproximeu les arrels per valors amb decimals; treballeu amb els radicals.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) La matriu B és la inversa de la matriu A si i sol si $A \cdot B = I$ i $B \cdot A = I$, on I és la matriu identitat del mateix ordre que la matriu A (i B).

(b) **Solució 1**

La forma més senzilla de resoldre el problema és realitzar el producte de la matriu A per la seva transposada i igualar el resultat a la identitat.

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & p \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{p}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{p}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} & 0 & p^2 + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per tant, s'ha complir que $p/\sqrt{2} - 1/2 = 0$ i que $p^2 + 1/2 = 1$. La solució comuna a aquestes dues equacions és $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solució 2

Evidentment, la qüestió es pot resoldre també trobant la matriu inversa de A i igualar el resultat a la matriu A^T. Com que

$$A^{-1} = \frac{1}{-\left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2p}{\sqrt{6}} & -\frac{p\sqrt{6}+\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{p}{\sqrt{3}} & \frac{p\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

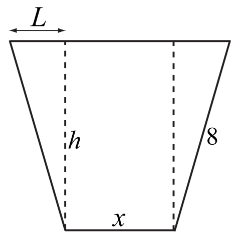
la igualació $A^{-1} = A^T$ dóna lloc a vuit equacions. Una d'elles,

$$\frac{1}{-\left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ens permet assegurar que $p = 1/\sqrt{2}$. S'ha de comprovar que aquest valor fa que les altres equacions es converteixin en identitats.

És clar que aquesta segona forma de resoldre la qüestió és bastant més llarga i propensa a equivocacions.

4.- Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres. Sota hi teniu un esquema de la secció del canal.



(a) ***Trobeu el valor del segment assenyalat*** L ***de la gràfica en funció de la variable*** x ***(amplada inferior del canal).***

(b) ***Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les seves bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per***

$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}\,.$$

(c) ***Calculeu el valor de*** x ***perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).***

[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c]

Solució

(a) Siguin $b_1 = x$ i $b_2 = 2x$ les dues bases del trapezi. Es compleix que $L + b_1 + L = b_2$. Per tant, $L = x/2$.

(b) L'altura del trapezi, d'acord amb el teorema de Pitàgores, compleix que $h^2 + L^2 = 8^2$. D'aquí se'n dedueix que

$$h(x) = \frac{\sqrt{256 - x^2}}{2}\,.$$

Llavors, l'àrea és

$$A(x) = \frac{b_1 + b_2}{2}\,h = \frac{3x}{2} \cdot \frac{\sqrt{256 - x^2}}{2} = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}\,,$$

tal com volíem.

(c) La derivada de la funció $A(x)$ és

$$A'(x) = \frac{3}{4}\left[\sqrt{256 - x^2} + \frac{x}{2\sqrt{256 - x^2}}\,(-2x)\right] = \frac{3(256 - 2x^2)}{4\sqrt{256 - x^2}}\,.$$

Llavors, $A'(x) = 0$ implica que $x = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$.

També és possible treballar amb la funció $f(x) = x^2(256 - x^2)$, resultat d'haver elevat la funció àrea al quadrat i haver eliminar els factors constants.

5.- Donats els punts $P = (1, 0, -1)$ ***i*** $Q = (-1, 2, 3)$***, trobeu un punt*** R ***de la recta*** $r : \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$ ***que compleixi que el triangle de vèrtexs*** P***,*** Q ***i*** R ***és isòsceles, en què*** $\overline{PR}$ ***i*** $\overline{QR}$ ***són els costats iguals del triangle.***

[2 punts]

Solució 1

El punt R de la recta és de la forma $R = (-3 + 2\lambda, -4 + 3\lambda, 3 - \lambda)$ (equacions paramètriques de la recta). Volem que $d(P, R) = d(Q, R)$.

$$\begin{aligned} d(P,R) &= \sqrt{(-3+2\lambda-1)^2 + (-4+3\lambda-0)^2 + (3-\lambda+1)^2} = \sqrt{14\lambda^2 - 48\lambda + 48}\,; \\ d(Q,R) &= \sqrt{(-3+2\lambda+1)^2 + (-4+3\lambda-2)^2 + (3-\lambda-3)^2} = \sqrt{14\lambda^2 - 44\lambda + 40}\,. \end{aligned}$$

Cal que $14\lambda^2 - 48\lambda + 48 = 14\lambda^2 - 44\lambda + 40$. La solució d'aquesta equació és $\lambda = 2$. El punt buscat és $R = (1, 2, 1)$.

Solució 2

Busquem l'equació del pla que passa pel punt mig del segment $\overline{PQ}$ amb vector característic $\overrightarrow{PQ}$; tots els punts d'aquest pla equidisten de P i Q. Després es busca la intersecció entre aquest pla i la recta r.

Punt mig: $M = \dfrac{P+Q}{2} = (0, 1, 1)$.

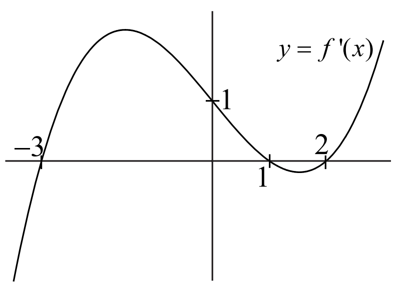
Vector característic: $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2, 2, 4)$.

Equació del pla: $-2(x-0) + 2(y-1) + 4(z-1) = 0 \Longrightarrow x + y + 2z + 3 = 0$.

Substituint l'expressió general dels punts de la recta r, $R = (-3 + 2\lambda, -4 + 3\lambda, 3 - \lambda)$ en l'equació del pla, obtenim que $\lambda = 2$, igual que en l'apartat anterior.

També es pot acabar aquest segon procediment resolent el sistema d'equacions lineals format per dues equacions obtingudes de la recta r i l'equació del pla que hem trobat.

6.- La funció $f(x)$ ***és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent*** $f'(x)$ ***creixent als intervals*** $(-\infty, -3]$ ***i*** $[2, +\infty)$***.***



(a) ***Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció*** $f(x)$ ***en el punt d'abscissa*** $x = 0$ ***.***

(b) ***Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció $f(x)$ i classifiqueu aquests extrems.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) L'equació de la recta tangent a la gràfica de $y = f(x)$ en el punt d'abscissa a és

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

De l'enunciat, sabem que $f(0) = 0$ ("passa per l'origen de coordenades") i de la gràfica en deduïm que $f'(0) = 1$. Llavors, l'equació de la recta buscada és $y = 0 + 1(x - 0)$; és a dir, $y = x$.

(b) Com que la funció $f(x)$ és derivable, els punts candidats a ser els seus extrems relatius tindran la derivada igual a zero. D'acord amb el gràfic, les abscisses d'aquests punts són $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ i $x_3 = 2$.

• En $x_1 = -3$ hi tenim un mínim, ja que en ell la funció derivada passa de ser negativa a ser positiva (és a dir, la funció $f(x)$ passa de ser decreixent a ser creixent).

• En $x_2 = 1$ hi ha un màxim. En efecte, la derivada passa de ser positiva (funció $f(x)$ creixent) a ser negativa (funció $f(x)$ decreixent).

• En $x_3 = 2$ torna a haver un mínim, per la mateixa raó que en x_1.